Devoir maison n° 4

À rendre le vendredi 18 octobre

Extrait d'un rapport du jury du CCINP : « *Le futur candidat doit s'appliquer à donner tous les arguments, même simples, conduisant à une conclusion. Nous lui conseillons de s'approprier petit à petit le cours par la pratique des exercices et des problèmes, de travailler les techniques habituelles et surtout de s'entraîner régulièrement à rédiger des questions de manière claire, explicite et structurée.* »

Exercice 1. Une fonction définie à partir d'une intégrale (*d'après CCINP 2023*)
Ce problème traite de l'étude d'une fonction définie par une intégrale. De telles fonctions apparaissent dans de nombreux domaines d'applications : automatique, traitement du signal, etc.
On s'intéressera en particulier au calcul de certaines des valeurs de cette fonction, à ses variations, ainsi qu'à son comportement asymptotique.

Partie I - Définition de la fonction

Q1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ? Calculer alors sa valeur en fonction de α.

Q2. Un nombre réel x étant fixé, donner un équivalent (sous la forme d'une puissance de t), lorsque t tend vers 0^+, de la fonction définie sur $]0\,;1]$ par $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t}$.

Q3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.

On définit alors sur $]0\,;+\infty[$ la fonction f par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
La suite du problème a pour but d'étudier certaines propriétés de la fonction f.

Partie II - Valeurs de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Q4. Montrer que $f(1) = \ln(2)$, puis que $f(2) = 1 - \ln(2)$. On pourra remarquer que, pour tout $t \in [0\,;1]$,

$$1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}.$$

Q5. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$f(n) = (-1)^{n-1}\ln(2) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{1}{k+1}.$$

Écrire une fonction python d'entête `def f_entier(n):` qui calcule $f(n)$ à partir de cette formule et renvoie la valeur de $f(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
On importera la fonction `log` (pour ln) de la bibliothèque `numpy`.

Partie III - Limite de f en 0

Q6. Montrer que, pour tout $x > 0$ et $t \in]0\,;1]$:

$$\frac{t^{x-1}}{2} \leqslant \frac{t^{x-1}}{1+t} \leqslant t^{x-1}.$$

En déduire que, pour $x > 0$:

$$\frac{1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

Q7. En déduire la limite de f en $+\infty$ ainsi que la limite de f en 0.

Q8. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On placera en particulier les points de cette courbe d'abscisses 1 et 2 (on donne $\ln(2) \approx 0{,}7$).

Partie IV - Équivalent de f en $+\infty$

Q9. Montrer que, pour $x \in]0\,;+\infty[$, $f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x}$.

Q10. On admet que f est décroissante sur $]0\,;+\infty[$. Montrer que, pour $x > 1$:

$$f(x+1) + f(x) \leqslant 2f(x) \leqslant f(x) + f(x-1).$$

Q11. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 2. [Facultatif]
On reprend les notations de l'exercice précédent, notamment la définition de la fonction f donnée à la fin de partie I.
Il s'agit ici de démontrer les deux résultats admis dans l'exercice 1. Plus précisément, dans une première partie on démontre l'égalité admise en **Q5**, puis dans une seconde partie on démontre les variations de f annoncées en **Q10**.
On pourra réutiliser les résultats des questions traitées dans l'exercice 1 si elles se trouvent avant **Q5** pour la partie A, et avant **Q10** pour la partie B.

Partie A - Une formule pour $f(n)$

Q12. Rappeler la formule de factorisation de $a^n - b^n$, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
En déduire que, pour $t \in [0\,;1]$, $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 - (-t)^n = (1+t)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k.$$

Q13. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$f(n) = (-1)^{n-1}\ln(2) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \frac{1}{k+1}.$$

On pourra remarquer que, pour $n \geqslant 2$ et $t \in [0\,;1]$: $t^{n-1} = (-1)^{n-1}(-t)^{n-1}$.

Partie B - Variations de f

Q14. Rappeler la définition de la décroissance d'une fonction g définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Q15. Soit α et β deux nombres réels tels que $-1 < \alpha \leqslant \beta$. Comparer, pour $t \in]0\,;1]$, t^α et t^β.
En déduire que f est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.